

有限体積法による浸透流の動的挙動に関する数値解析

Numerical Analysis of Dynamic Behavior of Seepage Flow with Finite Volume Method

藤澤和謙*・西村伸一**・村上 章***

Kazunori FUJISAWA, Shin-ichi NISHIMURA and Akira MURAKAMI

*正会員 博(農) 岡山大学大学院助教 環境学研究科 (〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1)

**正会員 農博 岡山大学大学院准教授 環境学研究科 (〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1)

***フェロー会員 農博 京都大学大学院教授 農学研究科 (〒606-8502 京都市左京区北白川追分町)

Dynamic behavior of seepage flow has been neglected when soil stability and deformation are investigated in geotechnical engineering because of the experimental and analytical difficulties. This study provides the novel work presenting the numerical analysis on the dynamics of seepage flow. In this paper, the numerical method for the dynamic phenomenon is proposed, applying the finite volume method with unstructured grids to the continuous and momentum conservation equations of seepage, and the numerical simulations of some two-dimensional problems subjected to dynamic boundary conditions and under a seismic acceleration are reported. The numerical results has shown the dynamic responses of seepage flow which cannot be produced by conventional static seepage analysis.

Key Words : seepage, dynamics, finite volume method

1. はじめに

浸透流とは水が土などの多孔質体の内部をその水頭差によって生じる流れを意味し、浸透流速に関して以下のダルシー則はよく知られている^{1),2)}。

$$v_i = -k_s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

ここに、 v_i は浸透流速(ダルシー流速)、 k_s は透水係数、 p は多孔質体中の間隙水の圧力(間隙水圧)、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 x_i は直交座標、 z は基準面からの高さを意味する。浸透流を解析する際には、式(1)に加えて間隙水の連続式を連立し、それらを浸透流速 v_i と間隙水圧 p について解く。ナビエ・ストークス式(3次元)に代表されるように、流体の流れはその流速(3成分)と圧力を4つの独立変数にして、1つの連続式(質量保存則)と3つの運動方程式(運動量保存則)の合計4つの方程式で記述される。式(1)のダルシー則は浸透流における運動方程式に対応するものであるが³⁾、定常状態における浸透流速と間隙水圧の関係を表しているため、浸透流の加速度項は出現しない。

地盤や盛土等の土構造物の変形挙動を解析では、土骨格に作用する有効応力を計算するには、土塊に作用する全応力だけでなく間隙水圧を計算する必要がある。そのため、土塊全体の運動方程式(静的問題では力のつり合い)と同時に間隙水圧と浸透流速について浸透流を解く、いわゆる土-水連成解析が広く行われている。

圧密などのようなゆっくりと進行する土の変形現象では、土粒子間を流れる浸透流は定常状態にあると仮定して式(1)のダルシー則を適用することができる。一方、地震時の地盤挙動や波浪を受ける土構造物におい

ては間隙水は地震力や土表面に作用する動的な圧力変化にさらされている。このような現象を解析するには定常状態の浸透流速と間隙水圧の関係を表す式(1)を浸透流の加速度を考慮した運動方程式に変更する必要がある。しかし、現在のところ浸透流の加速度は土骨格の加速度に比べて無視できると仮定して式(1)のダルシー則が用いられることが多く^{4),5),6)}、動的な現象を扱う場合にも、浸透流に関しては準静的な取り扱いがなされている。この原因として著者らは実験的及び解析的な側面から以下のような問題があると考えている。

- 短時間の間に变化する土中の浸透流速や間隙水圧を計測するには困難が伴い、浸透流の動的な変化が土塊に及ぼす影響に関する研究が十分に進んでいない。
- 浸透流の数値解析はその連続式と式(1)とを組み合わせ定常流を解析する方法が主流であり、浸透流の加速度を考慮した運動方程式を解く方法は確立していない。

土の剛性や安定性を議論するには浸透流速よりも間隙水圧や動水勾配を評価することが必要であり、特に間隙水圧や動水勾配の動的挙動を予測することは土塊の崩壊を考える上で重要な情報となる。

本研究は現在まで不明である浸透流の動的な挙動を把握し、土の変形や安定性をより正確に評価すること目的としている。本論文ではその目的の一助となるべく、上述した2番目の課題に対して、浸透流の運動方程式を安定的に解くことで、浸透流速や間隙水圧の動的変化を予測する数値解析手法を提案する。本論文で提案される手法は双曲型の偏微分方程式となる浸透流の運動方程式に対して非構造格子(三角形セル)を用

いた有限体積法を適用するものである⁷⁾。提案される手法によって、従来の浸透流解析では表現できない動的な境界条件や地震荷重を受けた時の浸透流速や間隙水圧の応答を推定することができる。本論文ではその解析手法を詳述するとともに、同手法から得られる数値解析結果を報告する。

2. 支配方程式

浸透流の連続式（質量保存則）と運動方程式（運動量保存則）は以下で表わされる^{8),9)}。

$$\frac{\partial \rho n}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho v_i v_j}{n} \right) + n \frac{\partial p}{\partial x_i} = n \rho g_i - \frac{n \rho g}{k_s} v_i \quad (3)$$

ここに、 t は時間、 n は間隙率、 g_i は重力加速度の x_i 成分を意味し、式 (3) では j について総和規約を用いている。式 (2) 及び式 (3) の導出を付録に記述する。式 (3) は水の非圧縮性 (ρ が一定) を仮定し、浸透流速 v_i が時間変化せずに空間に一様に分布する場合、式 (1) と一致する。また、浸透流のダルシー流速 v_i は通常十分小さく、 $v_i v_j \ll p$ であることを考えると、浸透流速 v_i が空間に一様でなくとも定常状態にある時には式 (1) が近似的に成立する。

本論文では 2 次元問題を扱う。 $v_3 = 0$ として、 $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$, $v_1 \rightarrow u$, $v_2 \rightarrow v$, $g_1 \rightarrow g_x$, $g_2 \rightarrow g_y$ と書き換えると、式 (2) と式 (3) より以下を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (4)$$

ここに

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho n \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2/n + np \\ \rho uv/n \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv/n \\ \rho v^2/n + np \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_f$$

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \frac{\partial n}{\partial x} + n \rho g_x \\ -p \frac{\partial n}{\partial y} + n \rho g_y \end{pmatrix}, \mathbf{S}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{n \rho g}{k_s} u \\ -\frac{n \rho g}{k_s} v \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。式 (4) 及び (5) 中の \mathbf{U} を以下では保存変数ベクトルと呼ぶ。間隙水圧 p と密度 ρ は水の体積圧縮係数 K_w によって以下の式で関係づけられる。

$$p = K_w \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + p_0 \quad (6)$$

ここに p_0 は密度が ρ_0 の時の水の圧力を表す。例えば $p = 0$ kPa (大気圧) のとき $\rho_0 = 1.0$ t/m³ とすれば式 (6) は以下のように簡単になる。

$$p = K_w \ln \rho \quad (7)$$

本論文では式 (7) の関係を用いる。一般的には、 p_0 は基準となる圧力であるため任意に与えることができ、0

とすればよい。 ρ_0 の値が 1.0 t/m³ とならない場合でも、 $\rho' = \rho/\rho_0$, $K'_w = K_w/\rho_0$ として式 (4), (5) に代入すれば ρ' , u , v に関して上記の式 (4), (5) と全く同様の方程式を得る。したがって、式 (7) を用いても式 (4) を解く上では一般性を失わない。本論文では式 (5), (7) を式 (4) に代入した方程式を ρ , u , v の 3 変数について解く。

3. 解析手法

式 (4) は時間及び空間に関して 1 階の (双曲型) 偏微分方程式である。これまで、浸透流解析では有限要素法が用いられることが多い。それは有限要素法が拡散問題のような空間に関して 2 階の (放物型もしくは楕円型) 偏微分方程式を解く場合に有効な手段であるためである。本論文では、式 (4) で表わされる双曲型の偏微分方程式を簡単かつ安定的に計算するため、数値解析手法として有限体積法を適用する。有限体積法では空間を有限個の体積セルで分割を行い、各セルにて解くべき変数の値を算出する。本論では解析対象の幾何学的形状を問題にしない三角形セルを用いる。その適用にあたり、以下のように式 (4) を各セルにて面積分を実行する。

$$\int_{A_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA + \int_{A_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} dA = \int_{A_i} \mathbf{S} dA \quad (8)$$

ここに、 A_i は i 番目のセルの面積を意味する。以下本論文では一貫して添え字 i はセル番号を表すものとして用いる。ガウスの発散定理を式 (8) の左辺第 2 項に適用し、セル上での面積分からセル境界上での線積分に変換すると

$$\int_{A_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA + \int_{\Gamma_i} \mathbf{E} d\Gamma = \int_{A_i} \mathbf{S} dA \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}t_x + \mathbf{G}t_y \quad (10)$$

を得る。ここに、 Γ_i は i 番目のセルを囲む境界線を表し、 t_x , t_y はそれぞれ境界線上の外向き単位法線ベクトルの x 成分、 y 成分である。セル領域は十分に小さいとして式 (9) を近似すると

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{1}{A_i} \mathbf{E}_{ij}^* \Delta \Gamma_{ij} + \mathbf{S}_i \quad (11)$$

となる。ここに j はセルの境界線分番号を意味し、 j について総和規約を適用する。 \mathbf{U}_i , \mathbf{S}_i は i 番目のセル中心に与えられる \mathbf{U} と \mathbf{S} のセル上での平均であり、 $\Delta \Gamma_{ij}$ はセルの j 番目の境界線分の長さを意味する。 \mathbf{E}_{ij}^* は i 番目のセルを囲む j 番目の境界線分の中点におけるフラックス \mathbf{E} の値を意味している。有限体積法では変数の値がセル中心 (=重心) に与えられ、セル境界上で変数値 (ここでは ρ , u , v の値) が分からないため、 \mathbf{E}_{ij}^* を式 (10) から直接的に計算することができない。そのため、隣接セルでの変数値から境界線上でのフラックスの値 \mathbf{E}_{ij}^* を計算する際にリーマンソルバーが必要になる。本研究では変数の伝播速度を考慮して近似的にフ

ラックスを計算する Harten et al.(1983) による近似リーマンソルバー (HLL リーマンソルバー) を用い、以下のように \mathbf{E}_{ij}^* を計算する^{10),11)}。

$$\mathbf{E}_{ij}^* = \begin{cases} \mathbf{E}_L & S_L \geq 0 \\ \frac{S_R \mathbf{E}_L - S_L \mathbf{E}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} & S_L < 0 < S_R \\ \mathbf{E}_R & S_R \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$S_L = \frac{\mathbf{q}_L \cdot \mathbf{t}}{n} - \sqrt{\frac{K_w}{\rho_L}}, \quad S_R = \frac{\mathbf{q}_R \cdot \mathbf{t}}{n} + \sqrt{\frac{K_w}{\rho_R}} \quad (13)$$

$$\mathbf{q} = (u, v)^T, \quad \mathbf{t} = (t_x, t_y)^T$$

式(12), (13)に現れる添え字の L, R はセル境界の左側 (Left side) と右側 (Right side) を意味し, L は計算を行っている i 番目のセル, R はそのセルと j 番目の境界線分を共有する隣接セルに示す (図-1 参照)。 $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ は次項で述べる変数の再構成手続きによって算出されるセル境界の右側と左側の \mathbf{U} の値である。 $\rho_L, \rho_R, \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R, \mathbf{E}_L, \mathbf{E}_R$ は式(5)及び式(10)を用いて $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ から計算される。間隙率分布は既知 (実際にはセル頂点で与える) であり、間隙率 n の値は境界線分の midpoint での値を採用する。浸透流速は $10^{-5} \sim 10^{-9} \text{m/s}$ のオーダー、体積圧縮係数は 10^6kPa のオーダーであることを考えると、式(13)から得られる S_L, S_R の値は通常 $S_L < 0 < S_R$ となる。

3.1 変数の再構成

有限体積法ではセル内の代表点として各セルの中心 (= 三角形セルの重心) に変数の値が保持される。精度良く数値計算を進めるには、MUSCL 法に代表されるように、セル内においても変数の値を適切に分布させる必要がある^{7),11)}。このように変数のセル内での分布を与えることは変数の再構成 (Reconstruction) と呼ばれる。ここでは変数ベクトル \mathbf{W} を

$$\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho v)^T \quad (14)$$

と定義し、以下の手続きで \mathbf{W} の再構成を行う。

1. セル中心での変数ベクトル \mathbf{W}_i から k 番の頂点における変数ベクトル \mathbf{W}_k を算出する (以下、添え字 k は頂点番号を表す)。
2. $\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_k$ を用いてセル内の勾配 $\nabla \mathbf{W}_i$ を求める。
3. 安定な数値計算を実現するため、勾配 $\nabla \mathbf{W}_i$ に制限 (Slope limiter) を施して安定化勾配 $\nabla \mathbf{W}_i^l$ (Limited gradient) を算出する。

これらの手続きにより得られた安定化勾配 $\nabla \mathbf{W}_i^l$ を用いてセル内の変数分布関数 $\widetilde{\mathbf{W}}_i(x, y)$ は

$$\widetilde{\mathbf{W}}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_i + \nabla \mathbf{W}_i^l (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x} = (x, y)^T \quad (15)$$

と与えられる。 \mathbf{x}_i はセル中心の座標を表す。式(15)によってセル上の任意の点の変数値が計算できる。以下に上述した変数の再構成手続きを詳述する。

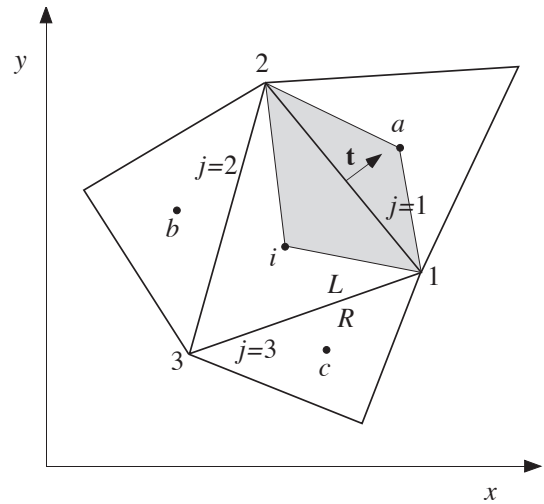


図-1 体積セル間の関係

(1) セル頂点での変数ベクトルの算出

セル中心に与えられた変数ベクトル値 \mathbf{W}_i から Holmes & Connel(1989) によって提案された手法を用いてセル頂点での変数ベクトル値 \mathbf{W}_k を計算する¹²⁾。 k 番の頂点を共有するセル番号の集合を $\sigma(k)$ とすると、 \mathbf{W}_k は以下のように計算できる。

$$\mathbf{W}_k = \sum_{i \in \sigma(k)} \frac{\omega_i}{\omega} \mathbf{W}_i, \quad \omega = \sum_{i \in \sigma(k)} \omega_i \quad (16)$$

$$\omega_i = 1 + \lambda_x (x_i - x_k) + \lambda_y (y_i - y_k) \quad (17)$$

$$\lambda_x = \frac{I_{xy} R_y - I_{yy} R_x}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}, \quad \lambda_y = \frac{I_{xy} R_x - I_{xx} R_y}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \quad (18)$$

$$I_{xx} = \sum_{i \in \sigma(k)} (x_i - x_k)^2, \quad I_{yy} = \sum_{i \in \sigma(k)} (y_i - y_k)^2,$$

$$I_{xy} = \sum_{i \in \sigma(k)} (x_i - x_k)(y_i - y_k) \quad (19)$$

$$R_x = \sum_{i \in \sigma(k)} (x_i - x_k), \quad R_y = \sum_{i \in \sigma(k)} (y_i - y_k) \quad (20)$$

(2) $\nabla \mathbf{U}_i$ の算出

図-1を参照して、Jawahar & Kamath(2000)に従って i 番目のセルにおける変数ベクトルの勾配 $\nabla \mathbf{W}_i$ の求め方を説明する¹³⁾。まず、 $\Delta 1a2$ においてセル中心 a での変数ベクトル値 \mathbf{W}_a と頂点 1, 2 での変数ベクトル値 $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ から以下のように $(\nabla \mathbf{W})_{1a2}$ を算出する。

$$(\nabla \mathbf{W})_{1a2} = \left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \right]_{1a2} \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \right)_{1a2} = \frac{1}{2A_{1a2}} \{ \mathbf{W}_1 (y_a - y_2) + \mathbf{W}_a (y_2 - y_1) + \mathbf{W}_2 (y_1 - y_a) \} \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \right)_{1a2} = \frac{1}{2A_{1a2}} \{ \mathbf{W}_1 (x_a - x_2) + \mathbf{W}_a (x_2 - x_1) + \mathbf{W}_2 (x_1 - x_a) \} \quad (23)$$

$\Delta 2i1$ についても式(21)~(23)と同様に $(\nabla \mathbf{W})_{2i1}$ を算出する。 $(\nabla \mathbf{W})_{1a2}$ と $(\nabla \mathbf{W})_{2i1}$ を $\Delta 1a2$ と $\Delta 2i1$ の面積によ

て平均化し, $j = 1$ の境界線分をまたぐ変数ベクトルの勾配 $(\nabla \mathbf{W})_{j=1}$ を以下のように算出する.

$$(\nabla \mathbf{W})_{j=1} = \frac{A_{1a2}(\nabla \mathbf{W})_{1a2} + A_{2i1}(\nabla \mathbf{W})_{2i1}}{A_{1a2} + A_{2i1}} \quad (24)$$

$(\nabla \mathbf{W})_{j=2}$, $(\nabla \mathbf{W})_{j=3}$ も同様に計算し, それらからセルにおける変数ベクトル勾配を

$$\nabla \mathbf{W}_i = \frac{A_{i1a2}(\nabla \mathbf{W})_{j=1} + A_{i2b3}(\nabla \mathbf{W})_{j=2} + A_{i3c1}(\nabla \mathbf{W})_{j=3}}{A_{i1a2} + A_{i2b3} + A_{i3c1}} \quad (25)$$

と算出する.

(3) 安定化勾配 $\nabla \mathbf{U}_i^l$ の算出

精度良くかつ安定に計算を行うには式 (25) から得られる変数ベクトルの勾配 $\nabla \mathbf{W}_i$ に周囲のセルのそれを考慮して勾配制限 (Slope limiting) を施し, 計算が安定して行える変数ベクトル勾配 $\nabla \mathbf{W}_i^l$ を用いる必要がある. 本研究では Jawahar & Kamath(2000) に従い, 以下のように $\nabla \mathbf{U}_i^l$ を計算する.

$$\nabla \mathbf{W}_i^l = w_a \nabla W_a + w_b \nabla W_b + w_c \nabla W_c \quad (26)$$

$$w_a = \frac{\gamma_b \gamma_c + \varepsilon^2}{\gamma_a^2 + \gamma_b^2 + \gamma_c^2 + 3\varepsilon^2}$$

$$w_b = \frac{\gamma_c \gamma_a + \varepsilon^2}{\gamma_a^2 + \gamma_b^2 + \gamma_c^2 + 3\varepsilon^2} \quad (27)$$

$$w_c = \frac{\gamma_a \gamma_b + \varepsilon^2}{\gamma_a^2 + \gamma_b^2 + \gamma_c^2 + 3\varepsilon^2}$$

$$\gamma_a = |\nabla W_a|^2, \gamma_b = |\nabla W_b|^2, \gamma_c = |\nabla W_c|^2 \quad (28)$$

ここに W は変数ベクトル \mathbf{W} の成分を意味する.

3.2 ソース項の取り扱い

式 (4) に現れるソース項 \mathbf{S} は式 (5) に示されるように, 圧力・重力に関する項 \mathbf{S}_0 と浸透流が土粒子から受ける摩擦に関する項 \mathbf{S}_f に分けられる. 安定して数値計算を進めるには \mathbf{S}_0 については陽的に, \mathbf{S}_f については陰的に解く必要がある.

\mathbf{S}_0 に含まれる g_x, g_y は定数であり, 間隙率の空間分布は既知としてセル頂点に与えられる. セル i における間隙率 n_i は,

$$n_i = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3} \quad (29)$$

と計算する (図-1 参照). $\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}$ については式 (22), (23) を $\Delta 123$ に適用して算出する. 間隙水圧 p と密度 ρ は数値解析によってセル中心にて算出される値 p_i と ρ_i を用いる.

\mathbf{S}_f については, それを陰的に評価するため式 (11) を以下のように陰的解法部分と陽的解法部分に分ける.

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{S}_{f,i} \quad (30)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{1}{A_i} \mathbf{E}_{ij}^* \Delta \Gamma_{ij} + \mathbf{S}_{0,i} \quad (31)$$

m 回目のタイムステップの計算が終わったとすると, 式 (30) について保存変数ベクトル \mathbf{U}_i の $m+1$ 回目の時間更新を以下のように \mathbf{S}_f を陰的に評価して行う.

$$\frac{\mathbf{U}_i^{m+1} - \mathbf{U}_i^m}{\Delta t} = \mathbf{S}_{f,i}^{m+1} \quad (32)$$

ここに Δt はタイムステップ間の時間間隔である. 式 (32) を \mathbf{U}_i^{m+1} について解くと以下を得る.

$$\mathbf{U}_i^{m+1} = \begin{pmatrix} \frac{(\rho n)_i^m}{(\rho u)_i^m} \\ \frac{1 + ng\Delta t/k_s}{(\rho v)_i^m} \\ \frac{1 + ng\Delta t/k_s}{1 + ng\Delta t/k_s} \end{pmatrix} \quad (33)$$

3.3 時間積分

式 (30) と式 (31) に分けられた式 (11) を解くには, 式 (30) を解いて得られた結果である式 (33) を初期条件として式 (30) を解く. 式 (31) を高精度かつ安定に解くために TVD ルンゲ・クッタ法^{14),15)} を用いる. 式 (31) の右辺を保存変数ベクトルの関数 $f(\mathbf{U})$ とおくと, TVD ルンゲ・クッタ法による計算は以下ようになる.

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U} + \Delta t f(\mathbf{U}^m)$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4} \mathbf{U}^m + \frac{1}{4} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t f(\mathbf{U}^{(1)}) \quad (34)$$

$$\mathbf{U}^{m+1} = \frac{1}{3} \mathbf{U}^m + \frac{2}{3} \mathbf{U}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t f(\mathbf{U}^{(2)})$$

時間間隔 Δt については CFL 条件に対応する以下の条件を満たす必要がある.

$$\Delta t \leq \min_i \left(\frac{r_i}{2 \max_j (\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{K_w/\rho})_{ij}} \right) \leq \min_i \left(\frac{r_i}{2 \max_j \sqrt{K_w/\rho}} \right) \quad (35)$$

ここに, r_i は i 番目のセルについてセル中心からセル頂点までの距離のうち最も小さいものを意味する. 実際の計算では式 (33) によって摩擦に関するソース項 \mathbf{S}_f の影響を適切に評価するには式 (35) の右辺の値よりも十分小さく時間間隔 Δt を与える必要がある.

3.4 境界条件

境界条件は解析領域の境界を有するセルにおいて式 (10) のフラックス \mathbf{E} の算定で反映される. ここでは浸透流中の波の伝播速度 $c = \sqrt{K_w/\rho}$ は浸透流速 u に比べて十分に大きいため,

$$u/n - c < 0 < u/n + c \quad (36)$$

が成り立つとして説明を進める. 式 (4) の左辺を 0 とし, 一次元のリーマン問題を考えると, 以下で表わされるリーマン不変量 R^-, R^+

$$R^- = u/n - 2c, \quad R^+ = u/n + 2c \quad (37)$$

が, それぞれの特性曲線 $dx/dt = u/n + c$ と $dx/dt = u/n - c$ に沿って伝達される (付録を参照). 境界線上で

の外向き法線ベクトル \mathbf{t} の向きを 1 次元の正方向にとることによって、領域の境界を有するセルにおいてセル内部と境界線上ではリーマン不変量 R^- が保存される。したがってセル内部と境界上とは以下の関係が成立する。

$$\frac{\mathbf{q}_L \cdot \mathbf{t}}{n} - 2\sqrt{\frac{K_w}{\rho_L}} = \frac{\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t}}{n} - 2\sqrt{\frac{K_w}{\rho_*}} \quad (38)$$

ここに、添字の L と $*$ はそれぞれ境界線の左側(式(12)、(13)と同様)と境界線上を意味し、境界線の左側には境界を含むセルが存在する。境界におけるフラックス \mathbf{E} は式(5)、(10)から

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho_*(\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t}) \\ \rho_* u_*(\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t}) + n p_* n_x \\ \rho_* v_*(\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t}) + n p_* n_y \end{pmatrix} \quad (39)$$

と与えられる。

境界条件として圧力 p_* を与える場合は、まず式(7)から ρ_* を求める。 \mathbf{q}_L および ρ_L は既知であるため、式(38)によって $\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t}$ は以下のように求まる。

$$\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t} = \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{t} - 2n\sqrt{\frac{K_w}{\rho_L}} + 2n\sqrt{\frac{K_w}{\rho_*}} \quad (40)$$

\mathbf{q}_* の x , y 成分である u_* , v_* を求めるには、境界の単位接線ベクトル \mathbf{s} を用いて、流速の接線成分 $\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t}$ について

$$\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{s} = \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{s} \quad (41)$$

を仮定し、式(40)と式(41)を u_* , v_* について解けばよい。このようにして得られた ρ_* , u_* , v_* と境界条件として与えた p_* の値から式(39)に従って境界におけるフラックス \mathbf{E} を算定できる。

流速 $\mathbf{q}_* = (u_*, v_*)^T$ を境界条件に与える場合は、式(38)を ρ_* について解き、

$$\rho_* = \left[\frac{2n\sqrt{K_w}}{(\mathbf{q}_* - \mathbf{q}_L) \cdot \mathbf{t} - 2n\sqrt{K_w/\rho_L}} \right]^2 \quad (42)$$

得られた ρ_* を式(7)に代入して p_* を求める。こうして求められた ρ_* , p_* , u_* , v_* を式(39)に代入して境界におけるフラックス \mathbf{E} を算定する。なお、境界からの流入出力 q_b を境界条件に設定する場合は

$$\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{t} = q_b \quad (43)$$

と式(41)から u_* , v_* を求め、それらを境界条件として与えることで流速境界条件に帰着する。

4. 解析結果

ここでは第3章で提案した数値解析手法を用いて行った動的な外部作用を受ける浸透水の挙動を報告する。本解析では浸透流の動的な応答の基本的な特徴を観察するため、単純な解析条件を設定している。以下の解析に用いた有限体積セルを図-2に示す。同図に示すように解析対象は横幅 1.0m、縦幅 0.5m の単位厚さを持つ

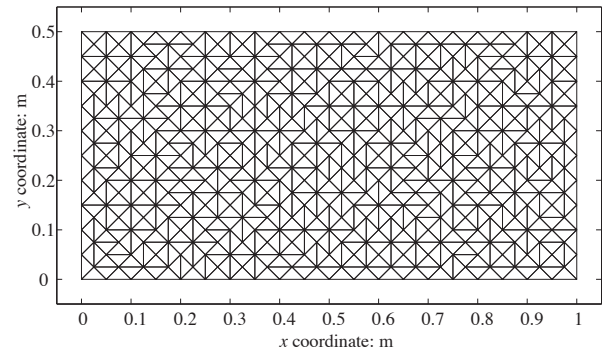


図-2 解析に用いた有限体積セル

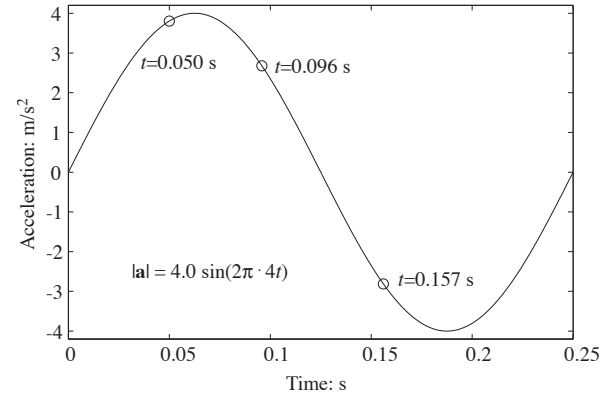


図-3 入力加速度

多孔質体であり、800個のセルにより分割されている。

4.1 動的な加速度に対する応答

地震波を受ける浸透水を想定し、以下の加速度(単位は m/s^2)を受ける浸透水の挙動を解析した。

$$\begin{aligned} a_x &= 4.0 \sin(2\pi \cdot 4t) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_y &= 4.0 \sin(2\pi \cdot 4t) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (44)$$

ここに a_x , a_y は加速度の x , y 成分であり、 $(x, y) = (1, 1)$ 方向、大きさが $4.0 \sin(2\pi \cdot 4t)$ の加速度を表している。加速度の大きさ(符号付き)の時間変化を図-3に示す。加速度の大きさはそれが $(x, y) = (1, 1)$ 方向に作用する時を正、 $(-1, -1)$ 方向に作用する時を負としている。 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)^T$ とすると、加速度の影響は対応する慣性力 $-\rho \mathbf{a}$ を式(4)の運動方程式の右辺に加えることで表した。したがって、すべてのセルにおいて慣性力 $-\rho \mathbf{a}$ が作用することとなる。初期条件には多孔質体であるすべてのセルで $p = 0 \text{ kPa}$ ($\rho = 1 \text{ t/m}^3$ に対応)、 $u = v = 0 \text{ m/s}$ とし、境界条件としてすべての境界で浸透水の流入がないとした。この解析条件は水で飽和され、密閉された多孔質体に 45 度方向に図-3に示された大きさを持つ加速度で振動を受けることに対応する。材料定数として透水係数 k_s に $2.0 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$ 、体積圧縮係数 K_w に 1000 MPa を与え、重力加速度 g を 9.8 m/s^2 、間隙率

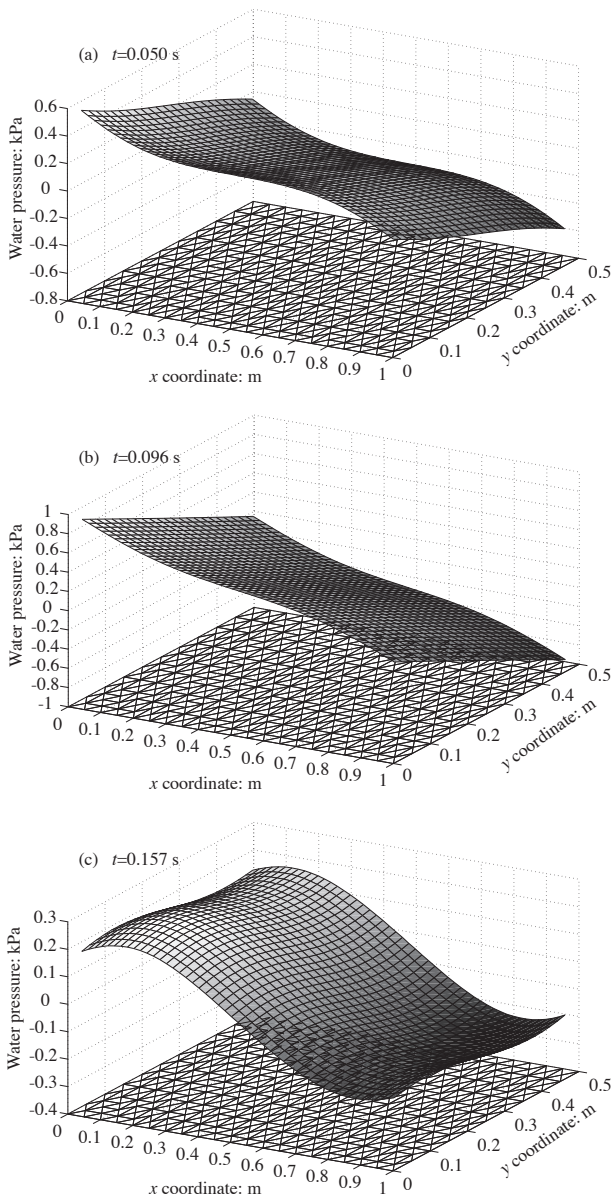


図-4 間隙水圧分布の変化

n は解析領域全体で一様に 0.5 とした。

図-4に加速度が作用し始めてから 0.050, 0.096, 0.157 秒後の間隙水圧分布を示す。これらの時刻に対応する加速度変化の様子を図-3に○で示している。図-4からは (1, 1) 方向の加速度が作用し始めると浸透水は慣性力として (-1, -1) 方向の力を受けることで $(x, y) = (0, 0)$ 付近の水圧が上昇し、逆に $(x, y) = (1.0, 0.5)$ 付近では圧力が減少した (図-4(a))。0.096 秒後 (図-4(b)) では継続する (1, 1) 方向の加速度によってその圧力差が拡大した。加速度の方向が (-1, -1) 方向に変化した後の 0.157 秒後 (図-4(c)) では加速度の向きが逆方向になったことで圧力差は減少するとともに、圧力波が伝わっていく様子が見て取れる。

このように多孔質体に変形が生じない場合であっても、浸透水の圧力は加速度の変化に応答を示し、地震時には浸透水はより複雑な圧力挙動を示すことが予想

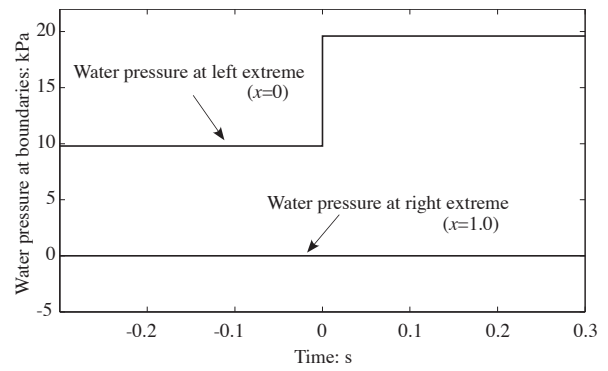


図-5 境界での (間隙) 水圧変化

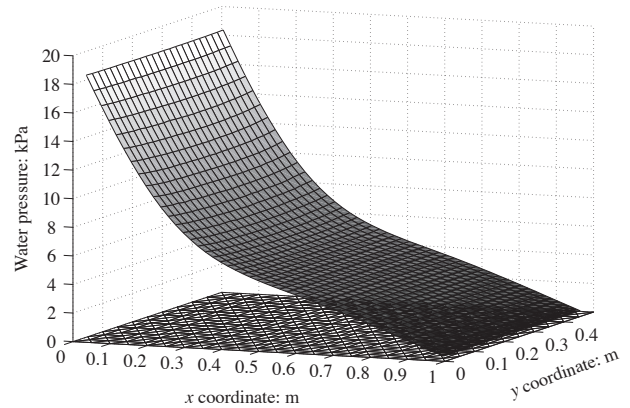


図-6 間隙水圧分布 ($t=0.015s$)

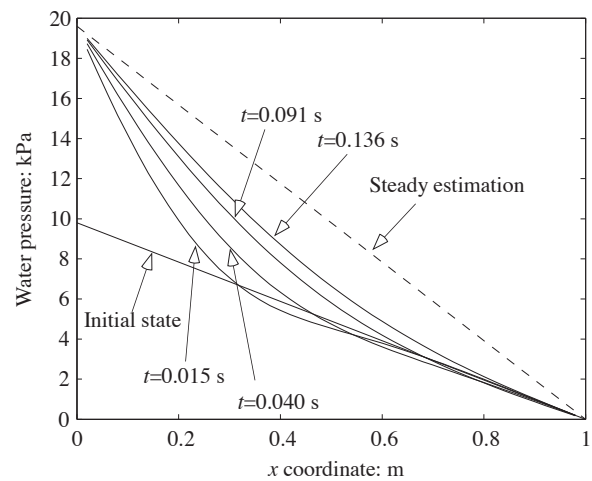


図-7 間隙水圧分布の経時変化 ($y = 0.25m$)

される。

4.2 動的な圧力境界条件

ここでは、波浪を受ける地盤や土構造物を考慮に入れ、動的な圧力変化を境界に作用する際の浸透流挙動を観察する。図-2に示す多孔質体の上下面 ($y = 0$ 及び $y = 0.5$) では不透水、右端 ($x = 1.0$) では水圧は常に 0kPa とし、その左端 ($x = 0$) において図-5に示すように時刻 $t = 0$ にて 9.8kPa から階段状に 19.6kPa に水圧を上昇させたときの多孔質中の間隙水圧および浸透流速の挙動

を解析する。材料定数には透水係数 k_s を $2.0 \times 10^{-3} \text{cm/s}$ 、体積圧縮係数 K_w を 1000MPa を与え、重力加速度 g は 9.8m/s^2 、間隙率は解析領域全体で一様に 0.5 とした。初期 ($t < 0$) では浸透流は定常状態にあるとして、間隙水圧 p には $x=0$ で 9.8kPa 、 $x=1.0 \text{m}$ で 0kPa となる線形分布 (動水勾配は 1.0)、浸透流速には $u=2.0 \times 10^{-3} \text{cm/s}$ 、 $v=0 \text{cm/s}$ を与えた。

図-6には時刻 $t=0.015$ 秒での間隙水圧分布を示す。同図から分かるように、間隙水圧の分布は一定な動水勾配を持つ定常解の平面分布とは異なり、水圧を階段状に上昇させた $x=0$ の境界付近では急な動水勾配を有する曲面となっている。本解析は x 方向の一次元問題であり、 $y=0.25$ の平面 (解析領域の中心線) での間隙水圧の経時変化を図-7に示す。時刻 $t < 0$ では直線的に分布していた間隙水圧は、 $t=0$ で与えられた $x=0$ における境界の圧力変化によって短時間の間に $x=0$ の付近では圧力が上昇するが、 $x=1.0$ にまでその影響が及ぶにはやや時間を要する。時間が経過するとともに、 $x=0$ の付近ではその動水勾配が小さくなり、逆に $x=1.0$ の付近では動水勾配が大きくなることで定常状態の直線分布へと漸近していく。直線分布に漸近するまでにはいくらかの時間を要し、著者らはこの時間は透水係数が小さくなるほど長くなることを確かめている。

動水勾配は多孔質体を構成する土粒子等に直接的に加わる流体力であり、土塊の安定性と密接に関係している。ここでの数値解析結果は動的な圧力変化を受ける境界付近では従来の定常流を解析する浸透解析では動水勾配を過小に評価する可能性があることを示唆すると考える。

5. まとめ

本論文では動的な浸透流の挙動を予測するため、その連続式に加えて運動方程式 (運動量保存則) を数値的に安定に解く方法を有限体積法を用いて提案した。その手法による数値解析の結果は従来の加速度項を無視した浸透流解析からは得ることのできない浸透流の動的な挙動を表現することが明らかとなった。本論で得られた知見を以下にまとめる。

- 浸透流の運動方程式を安定的に解くには、摩擦に関わるソース項 \mathbf{S}_f を陰的に解く必要がある。陽的な計算過程では Jawahar&Kamath(2000) によって提案された勾配制限 (Slope limiter) を用いて変数の空間分布を算出し、近似リーマンソルバーと TVD ルンゲ・クッタ法を適用することで安定計算が可能である。
- 加速度変化を受ける浸透水はそれを間隙に含む多孔質体の変形がなくとも、その内部では複雑な水圧変化が生じる。
- 境界の圧力の影響が多孔質体内を伝播するのに

時間を要する。そのため、動的な水圧変化を受ける境界付近では、定常状態から予想される動水勾配よりも大きなそれが作用する。

土木や地盤工学の分野では、浸透流そのものの挙動だけでなく、それが土塊に及ぼす影響を評価することが重要である。以上に述べた動的な浸透挙動に加えて、土塊とそれとの相互作用を明らかにすることが今後さらに重要な課題と考える。

付録 A 支配方程式の導出と数値特性

A.1 浸透流の運動方程式

浸透流の連続式については、間隙率 n の領域を占める水の質量保存則を考えることで以下のように与えられる。

$$\left(\int_v \rho n dv \right)' = 0 \quad (\text{A1})$$

ここに、 v は領域の体積を表す。式 (A1) に Reynolds の輸送定理を適用して以下を得る。

$$\frac{\partial \rho n}{\partial t} + \frac{\partial \rho n \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A2})$$

ここに、 \bar{v}_i は浸透流の平均流速を意味し、ダルシー流速 v_i とは以下の関係があり、 j については総和規約を用いている。

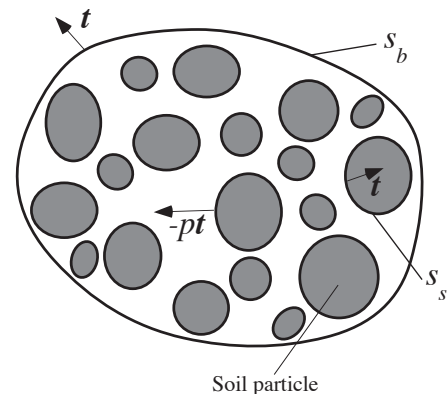
$$v_i = n \bar{v}_i \quad (\text{A3})$$

運動量保存則については、領域を占める水の運動量と作用する力の関係を考えて以下のように与えられる。

$$\left(\int_v \rho n \bar{v}_i dv \right)' = - \int_{s_b+s_s} p t_i ds + \int_v \rho n g_i dv - \int_v f_i dv \quad (\text{A4})$$

ここに、 s は流体の境界長さ、 f_i は浸透流に加わる土からの抵抗を物体力として換算したものであり、 s_b 、 s_s はそれぞれ領域の境界、領域内部の土粒子と水の境界を意味する (付図-A1 参照)。式 (A4) の左辺について Reynolds の輸送定理を適用し、

$$\left(\int_v \rho n \bar{v}_i dv \right)' = \int_v \frac{\partial \rho n \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho n \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} dv \quad (\text{A5})$$



付図-A1 浸透水と土粒子の境界

を得る。 j について総和規約を用いている。右辺の第一項については領域の境界 s_b と土粒子と水の境界 s_s で囲まれた水の占める領域にガウスの発散定理を用いることで

$$\int_{s_b+s_s} p t_i ds = \int_{v_w} \frac{\partial p}{\partial x_i} dv_w = \int_v n \frac{\partial p}{\partial x_i} dv \quad (\text{A6})$$

となる。ここに v_w は水の占める体積を示しており、二つ目の等号では $dv_w = n dv$ を用いて領域全体での積分に変換することで平均操作を行っている。式 (A5), (A6) を式 (A4) に代入して

$$\frac{\partial \rho n \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho n \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = -n \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho n g_i - f_i \quad (\text{A7})$$

を得る。 f_i については式 (A7) の定常状態のつり合いを考えることで

$$f_i = \frac{\rho n g}{k} v_i \quad (\text{A8})$$

と透水係数を用いて土粒子と浸透水の間に働く力をモデル化する。式 (A2), (A7) に式 (A3) を代入することで式 (2), (3) を得る。

A.2 支配方程式の数理解特性

本文の第3章で説明した数値解析手法は保存変数 \mathbf{U} の伝播に関する知見を必要とする。ここでは、それに関して支配方程式 (4), (5) の数理解特性について簡潔にまとめる。式 (7) を用い、ソース項の影響を無視して式 (4), (5) を一次元問題に書き改めると

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho n \\ \rho u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2/n + n K_w \ln \rho \end{pmatrix} \quad (\text{A10})$$

となる。式 (A9) を以下のように変形する。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0}, \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (\text{A11})$$

行列 \mathbf{A} の成分は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_w}{\rho} - \frac{u^2}{n^2} & \frac{2u}{n} \end{pmatrix} \quad (\text{A12})$$

であり、この行列の固有値が保存変数 \mathbf{U} に関係した伝播速度となる。実際に固有値を計算すると

$$\lambda^- = u/n - \sqrt{K_w/\rho}, \lambda^+ = u/n + \sqrt{K_w/\rho} \quad (\text{A13})$$

の異なる2つの固有値 λ^- と λ^+ が得られる。

式 (A13) によって u, ρ を λ^- と λ^+ で表わすと

$$u = \frac{n(\lambda^+ + \lambda^-)}{2}, \rho = \frac{4K_w}{(\lambda^+ + \lambda^-)^2} \quad (\text{A14})$$

となる。式 (A14) を式 (A9), (A10) に代入し、間隙率 n が一定であるとして変形を進めると

$$\frac{\partial R^+}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial R^+}{\partial x} = 0, R^+ = \frac{3\lambda^+ - \lambda^-}{2} \quad (\text{A15})$$

$$\frac{\partial R^-}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial R^-}{\partial x} = 0, R^- = \frac{-\lambda^+ + 3\lambda^-}{2} \quad (\text{A16})$$

を得る。式 (A15), (A16) は特性曲線 $dx/dt = \lambda^-$ と $dx/dt = \lambda^+$ に沿って R^+ と R^- が伝播することを示している。 R^+ と R^- を式 (A14) を用いて u と ρ によって表すと

$$R^- = \frac{u}{n} - 2\sqrt{\frac{K_w}{\rho}}, R^+ = \frac{u}{n} + 2\sqrt{\frac{K_w}{\rho}} \quad (\text{A17})$$

となる。

参考文献

- 1) Lambe, T. W. and Whitman, R. V.: *Soil Mechanics, SI version*, John Wiley & Sons, 1979.
- 2) Budhu, M.: *Soil Mechanics and Foundation, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, 2007.
- 3) Nader, J. J.: Darcy's law and the differential equation of motion, *Geotechnique*, Vol. 59, No. 6, pp.551-552, 2009.
- 4) Kato, R., Sunami, S., Oka, F., Kimoto, S. and Kodaka, T.: A seepage-deformation coupled analysis method for unsaturated river embankment, *Proceedings of the international symposium on prediction and simulation methods for geohazard mitigation, IS-KYOTO*, pp.401-407, 2009.
- 5) Uzuoka, R., Mori, T., Chiba, T., Kamiya, T. and Kazama, M.: Numerical prediction of seepage and seismic behavior of unsaturated hill slope, *Proceedings of the international symposium on prediction and simulation methods for geohazard mitigation, IS-KYOTO*, pp.159-165, 2009.
- 6) Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-Clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 48, No. 6, pp.771-790, 2008.
- 7) Leveque, R. T.: *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge University Press, 2002.
- 8) El Shamy, U. and Aydin, F.: Multiscale modeling of flood-induced piping in river levees, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 134, No. 9, pp.1385-1397, 2008.
- 9) Jackson, R.: *The dynamics of fluidized particles*, Cambridge University Press, London, 2000.
- 10) Harton, A., Lax, P. D. and van Leer, B.: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM review*, Vol. 25, No. 1, pp.35-61, 1983.
- 11) Toro, E. F.: *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, 2nd edition*, Springer, 1999.
- 12) Holmes, D. G. and Connel, S. D.: Solution of the 2D Navier-Stokes equations on unstructured adaptive grids, *Proc. 9th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Technical Papers (A89-41776 18-02), pp.25-39, 1989.
- 13) Jawahar, P. and Kamath, H.: A high-resolution procedure for Euler and Navier-Stokes computations on unstructured grids, *J. Comput. Phys.*, Vol. 164, pp.165-203, 2000.
- 14) Shu, C. W.: Total-variation-diminishing time discretizations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 9, pp.1073-1084, 1988.
- 15) Shu, C. W. and Osher, S.: Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, *J. Comput. Phys.*, Vol. 77, pp.439-471, 1988.

(2010年3月9日受付)