

土の侵食速度を用いた堤体の越流破堤解析

Numerical analysis of embankment failure due to overflow based on erosion rates of soils

藤澤和謙*・村上 章**・西村伸一***・珠玖隆行****

Kazunori FUJISAWA, Akira MURAKAMI, Shin-ichi NISHIMURA and Takayuki SHUKU

*正会員 博(農) 岡山大学大学院講師 環境学研究科 (〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1)

**フェロー会員 農博 京都大学大学院教授 農学研究科 (〒606-8502 京都市左京区北白川追分町)

***正会員 農博 岡山大学大学院教授 環境学研究科 (〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1)

****正会員 博(環) 岡山大学大学院助教 環境学研究科 (〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1)

Recently, the failure of embankments, such as levees and small embankment dams for irrigation reservoirs, has occurred more frequently because of a greater chance of severe typhoons and localized heavy rains. Overflow is known as a primary cause of embankment breaks. The purpose of this study is to develop a numerical method which can predict the breach process of an embankment caused by overflow. This paper presents two-dimensional and three dimensional numerical simulation of the embankment breaching. The finite volume method with a Riemann solver is applied to numerically solve shallow water equations for computing the overflow on the embankments and the configuration change of the embankment profiles is successively calculated in accordance with the erosion rates of the embankment materials as a function of the bed shear stress exerted onto the embankment surface. In order to achieve the stable computation, the surface gradient method was incorporated into the finite volume discretization. The comparison between the numerical results and experimental investigations has revealed that this numerical method stably computes the embankment profiles subjected to overflow breaching and the time up to embankment breaks can be well predicted.

Key Words : Embankment, Failure, Overflow, Erosion, Numerical analysis

1. はじめに

近年、台風や集中豪雨によって、防水や利水を目的とする堤防やため池等の土構造物が決壊に至る事例が毎年のように報告される。その主要な原因に越水（越流）が挙げられ、それは貯水位及び河川水位が堤高を上回り、水が溢れ出す現象である。多くの台風が日本を通過した2004年（平成16年）には、台風23号により兵庫県淡路島において181個ものため池が決壊に至り、その多くは越流が原因であった¹⁾。また、同年には福井県福井市においても集中豪雨により足羽川の堤防が越水により破堤に至った²⁾。2011年には台風12号に伴う豪雨によって、和歌山・奈良の両県において天然ダム（土砂崩れが河川を堰き止めることによって形成されたダム）が形成され、それらは越水による決壊の危険性にさらされた。国外のダムに目を向ければ、Foster et al. (2000) は過去に起きた世界中のフィルダムの決壊を統計的に分析した結果、全体の約48%が越水、約46%がパイピングによる決壊であったことを報告している³⁾。このように、ダムや堤防の土構造物にとって越水は破堤に至る可能性の高い脅威である。越水による堤体の決壊が生じると、堤体を構成する土が越流水によって侵食を受け、土粒子が流亡することで破堤に至る。その際には、大量の水と土砂が流出し、堤体の下流域に甚大な被害を与える。今後、堤防やため池等の

堤体には効果的な越水対策を施すことが求められているが、そのためには、堤体の決壊過程を予測するための数値解析手法が有効なツールとなる。

堤体の侵食解析については、これまでにいくつかの手法が提案されている。しかし、越水による3次元的な破堤過程を表現したものは少なく、その安定性と再現性は検証されていないのが現状である^{4),5),6)}。そこで、本研究では、堤体の3次元的な越流侵食過程を安定的にシミュレートできる数値解析手法の開発に取り組み、その手法の再現性について考察する。越水による堤体侵食をシミュレートするには、堤体表面を流れる越流水の挙動と侵食による堤体形状の変化を同時に解析することが必要となる。本研究では、越流水の挙動を再現するために浅水流方程式を用い、堤体形状の変化については土の侵食速度（単位時間の間に単位表面積当たりから侵食によって流体に取り込まれる土粒子の体積）からその変化を逐次的に計算する方法をとった。浅水流方程式は、水深方向の平均流速を用いて地表面の水の流れを記述するものであり、2次元の計算領域によって自由表面を持つ水流を容易に解析できるのが利点である。本論では、まず、数値解析手法について説明を行い、2次元的な堤体の越流侵食過程について室内実験結果と数値解析結果の比較を行う。その後、3次元の堤体の越流侵食シミュレーション結果を報告し、提案手法によって安定的な3次元計算が可能であることを

示す.

2. 侵食速度

堤体の侵食のような、表面流による地表面の変化を方程式としてモデル化する際には、通常2通りの方法がある. 一つ目として、掃流砂のように非粘着性の材料が水流によって地表面を移動する現象の場合には、流砂量ベクトルを \mathbf{q}_B 、地表面の高さを z で表わすと以下の式 (1) によって地表面の形状変化を記述することができる.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{q}_B}{1-\lambda} \quad (1)$$

ここに、 λ は地表面の間隙率を表す. 式 (1) においては、水流によって運ばれる砂はすべて地表面を構成する (すべての砂粒子は堆積する) ことを前提としている.

もう一つの場合として、粘土の侵食に見られるように、一度侵食によって水流に取り込まれた土粒子が再び堆積することがない場合には、侵食速度を E で表わし、以下の式 (2) によって地表面の形状変化を記述できる.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{E}{1-\lambda} \quad (2)$$

堤体上を十分な水量が越流する場合には、侵食によって水流に取り込まれた堤体土の粒子は瞬時に下流へと運ばれるため、そのほとんどは堤体上で再び堆積することはない. したがって、堤体侵食の表現には、侵食土粒子の再堆積を無視することで式 (2) を用いることができる.

侵食速度 E は底面せん断応力 τ の関数として与えられ、既往の研究から

$$E = \begin{cases} \alpha(\tau - \tau_c)^\gamma & \tau > \tau_c \\ 0 & \tau \leq \tau_c \end{cases} \quad (3)$$

と表されることが知られている⁷⁾. ここに、 τ_c は限界せん断応力、 α と γ は材料定数である. 式 (3) は粘着性の材料だけでなく、非粘着性の材料についても適用することができる⁸⁾. 均一な砂の場合には、限界せん断応力 τ_c の値は粒径の大きさによって、おおよそ決定される⁹⁾. 本論文では、式 (2) を用いて越流による堤体侵食解析を行う.

3. 支配方程式

堤体上を流れる越流水の挙動は以下の浅水流方程式に従うとする.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (4)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \\ uvh \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + gh^2/2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial z/\partial x \\ -gh\partial z/\partial y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここに、 \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{S} はそれぞれ状態変数ベクトル、 x 方向のフラックス、 y 方向のフラックス、ソース項ベクトルであり、 u , v は x 方向、 y 方向の流速、 h は水深、 g は重力加速度の大きさを表す. 式 (5) 中の S_{fx} , S_{fy} は x 方向、 y 方向の摩擦勾配であり、マンニングの粗度係数 n を用いて以下のように表される.

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (6)$$

式 (4) の浅水流方程式は水深方向の水圧に静水圧分布を仮定し、漸変流を扱うものである. 堤体上を流れる越流水は、天端の斜面勾配の急変部においてこの仮定を満たすとは限らないが、本研究では簡単のため式 (4) を越流水の流れの解析に適用する.

堤体の侵食を計算するために式 (2) を用いるが、侵食速度 E を評価する際に、侵食面 (堤体表面) に作用する底面せん断応力 τ を評価する必要がある. それは摩擦勾配から以下のように計算される.

$$\tau = \rho |\mathbf{S}_f| = \rho gh \sqrt{S_{fx}^2 + S_{fy}^2} \quad (7)$$

ここに、 ρ は水の密度である. 堤体の越流侵食は式 (2) と式 (4) によって表現され、解くべき未知数は h , u , v , z の4つとなる.

4. 数値解析手法

ここでは、支配方程式である式 (2) 及び (4) を連立して、安定的に数値解析する手法を解説する. 式 (4) の浅水流方程式の数値解法については、これまでに幾つもの解法が提案されている. 本研究では、浅水流方程式を解くに当たって、表面流のない領域 (Dry 領域) と表面流のある (Wet 領域) とを安定的に解析可能なリーマンソルバーを用いた有限体積法を適用する. 本論で解説する解析手法は、Yoon & Kang (2004) によって提案された計算手法¹⁰⁾に、Zhou et al. (2001) による SGM¹¹⁾ (Surface Gradient Method) の概念を導入したものである. Yoon & Kang (2004) の方法は、非構造計算格子上で、近似リーマンソルバーを用いた MUSCL 法¹²⁾ (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) によって、式 (4) を数値的に解くものである. しかし、侵食によって地表面の勾配が複雑に変化する箇所においては、流速が小さい場合に計算が破綻することが確認された. これは、式 (4) の左辺の第2, 3項であるフラックス項と同式右辺のソース項とのバランスが崩れることが原因であった. この数値計算上の不安定性を解消するため、Zhou et al. (2001) によって提案された SGM を非構造計算格子へと拡張して導入し、複

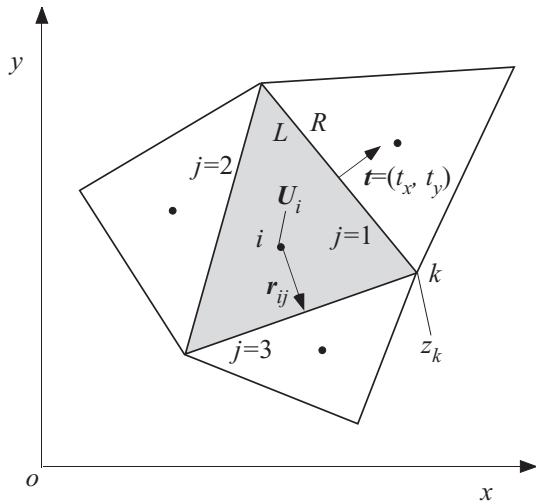


図-1 三角形セルと変数の配置

雑な形状の地表面上においても安定的な表面流計算を実現したものが、ここで述べる数値解析手法である。

4.1 有限体積法

本研究では3角形セルによって空間を離散化し、数値解析を行った。図-1に計算セルと変数の配置を示す。数値計算によって求める変数 h, u, v, z の4つのうち、 h, u, v の3についてはセルの中心で定義し、 z についてはセルの頂点上で定義する。有限体積法の適用に当たり、式(4)を計算セル上で面積分を行うと以下を得る。

$$\int_{A_i} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} dA = \int_{A_i} S dA \quad (8)$$

ここに、 A_i は i 番目のセルの面積を意味する。以下本論文では一貫して添え字 i はセル番号を表すものとして用いる。ガウスの発散定理を式(8)左辺の第2項と第3項に適用し、セル上での面積分からセル境界上での線積分に変換すると

$$\int_{A_i} \frac{\partial U}{\partial t} dA + \int_{\Gamma_i} \mathbf{E} d\Gamma = \int_{A_i} S dA \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = F t_x + G t_y \quad (10)$$

を得る。ここに、 Γ_i は i 番目のセルを囲む境界線を表し、 t_x, t_y はそれぞれ境界線上の外向き単位法線ベクトルの x 成分、 y 成分である。セル領域は十分に小さいとして式(9)を近似すると

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^3 \mathbf{E}_{ij}^* \Delta\Gamma_{ij} + S_i \quad (11)$$

となる。ここに j はセルの境界線番号を意味する。 U_i, S_i は i 番目のセル中心に与えられる U と S のセル上での平均値であり、 $\Delta\Gamma_{ij}$ はセルの j 番目の境界線分の長さを意味する。 \mathbf{E}_{ij}^* は i 番目のセルを囲む j 番目の境界線分の midpoint におけるフラックス \mathbf{E} の値を意味する。 \mathbf{E}_{ij}^* は、Harten et al.(1983)による近似リーマンソルバー¹³⁾

(HLL リーマンソルバー)によって以下のように計算される。

$$\mathbf{E}^* = \begin{cases} \mathbf{E}_L & S^- \geq 0 \\ \frac{S^+ \mathbf{E}_L - S^- \mathbf{E}_R + S^- S^+ (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S^+ - S^-} & S^- < 0 < S^+ \\ \mathbf{E}_R & S^+ \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

ここに、添え字の L, R は、後に述べるセル内の内挿関数によってセル境界の左側 (Left side) もしくは右側 (Right side) へと内挿された変数の値を意味する。なお、式(12)に現れる S^-, S^+ は状態変数 U の伝播速度に対応し、地表面の Dry/Wet に応じて以下のように求められる。

$$S^- = \begin{cases} \min(\mathbf{q}_L \cdot \mathbf{t} - \sqrt{gh_L}, u^* - \sqrt{gh^*}) & \\ \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{t} - \sqrt{gh_L} & \text{(when right side is dry)} \\ \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{t} - 2\sqrt{gh_R} & \text{(when left side is dry)} \end{cases} \quad (13)$$

$$S^+ = \begin{cases} \max(\mathbf{q}_R \cdot \mathbf{t} + \sqrt{gh_R}, u^* + \sqrt{gh^*}) & \\ \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{t} + 2\sqrt{gh_L} & \text{(when right side is dry)} \\ \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{t} + \sqrt{gh_R} & \text{(when left side is dry)} \end{cases} \quad (14)$$

ここに、

$$\mathbf{q} = (u, v)^T, \mathbf{t} = (t_x, t_y)^T \quad (15)$$

$$u^* = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R) \cdot \mathbf{t} + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \quad (16)$$

$$h^* = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4}(\mathbf{q}_L - \mathbf{q}_R) \cdot \mathbf{t} \quad (17)$$

である。

4.2 変数の内挿法

式(12)の \mathbf{E}^* を計算する際には、各セルにおいて変数を内挿 (線形補間) し、セル境界上での変数値を求める。セル中心に与えられた変数の値から、セル上の内挿関数を求めることは変数の再構成 (Reconstruction) と呼ばれる。その詳細な計算過程は Yoon & Kang (2004) に譲るが、例えば、ある変数 ϕ の内挿関数を求める手続きは以下にまとめられる。

1. 変数の内挿を行うセルに隣接する計算セルに格納された変数の値から、対象セルにおける変数の勾配 $\nabla\phi$ (Unlimited gradient と呼ばれる) を計算する。
2. 隣接する計算セルにおける変数勾配に応じて、対象セルにおける制限勾配 $(\nabla\phi)^l$ (Limited gradient と呼ばれる) を求める。
3. 得られた制限勾配 $(\nabla\phi)^l$ を用いて対象セル (i 番目のセル) における変数値は以下の関数で内挿される。

$$\phi_i^{rec}(\mathbf{r}_i) = \phi_i + (\nabla\phi)_i^l \cdot \mathbf{r}_i \quad (18)$$

ここに、 ϕ_i^{rec} は内挿関数、 \mathbf{r}_i は i 番目のセル中心の座標からの相対位置ベクトルである。

4.3 SGMの適用

水位を η ($= h + z$) と表し、

$$\eta_i = h_i + \frac{1}{3} \sum_k z_k \quad (19)$$

とセル中心の η の値を計算する。ここに、 z_k はセル頂点における地表面高さ z の値である。SGM を適用すれば、セル境界における h , u , v は以下のように計算される。

$$h_{ij} = \eta^{rec}(\mathbf{r}_{ij}) - z_{ij}, \quad (20)$$

$$u_{ij} = \frac{(hu)^{rec}(\mathbf{r}_{ij})}{h_{ij}}, \quad v_{ij} = \frac{(hv)^{rec}(\mathbf{r}_{ij})}{h_{ij}} \quad (21)$$

ここに、 \mathbf{r}_{ij} は i 番目のセル中心から同セル j 番目の辺の中点に向かうベクトルであり、 z_{ij} はその辺の中点における地表面高さ z を意味する (図-1 参照)。 z_{ij} はその辺をなす2つ頂点における地表面高さ z の平均値として得られる。式 (21) に示されるように、水深 h は水位 η を内挿した後に、地表面高さ z を減ずることで算出されるのが、SGM の特徴である。このように計算されたセル境界上での h , u , v の値から、式 (12) に従ってセル境界における \mathbf{E}^* を算出する。

4.4 ソース項の取り扱い

式 (5) に示すように、式 (4) のソース項 \mathbf{S} は、斜面勾配項 \mathbf{S}_0 と摩擦項 \mathbf{S}_f に分けられる。これらの項の扱いは数値計算の安定性に大きく影響するため、慎重な取り扱いが要求される。空間離散化を施した式 (11) の右辺は、定常状態において 0 にならなければならない。特に、流速がない場合には、 $\mathbf{S}_f = 0$ となり、式 (11) の右辺第1項と第2項に含まれる \mathbf{S}_0 とが釣り合うことが要求される。この条件を満たすため、 \mathbf{S}_0 の第2, 3成分 ($= -gh\nabla z$) を

$$-gh\nabla z = -g(\eta - z)\nabla z = -g\eta\nabla z + \frac{1}{2}g\nabla z^2 \quad (22)$$

と変形し、各セルにおいて以下のように \mathbf{S}_0 の第2, 3成分を求める。

$$(-gh\nabla z)_i = -g\eta_i(\nabla z)_i + \frac{1}{2}g(\nabla z^2)_i, \\ (\nabla z)_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^3 z_{ij} \Delta\Gamma_{ij} \mathbf{t}_{ij}, \quad (\nabla z^2)_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^3 z_{ij}^2 \Delta\Gamma_{ij} \mathbf{t}_{ij} \quad (23)$$

ここに、 \mathbf{t}_{ij} は i 番目セルの j 番目の辺における外向き単位法線ベクトルを表す。式 (23) によって計算される \mathbf{S}_0 が、流速がなく、水位が一定の定常状態において、SGM を通して算定される式 (11) の右辺をゼロにすることは容易に確認できる。

摩擦項 \mathbf{S}_f については、水深 h が小さく、摩擦勾配が大きくなる状況においても、安定的に計算を行うため、陰的に取り扱う。式 (11) を以下のように分離し、

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{S}_{f,i} \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^3 \mathbf{E}_{ij}^* \Delta\Gamma_{ij} + \mathbf{S}_{0,i} \quad (25)$$

式 (24) を陰的に、式 (25) を陽的に時間更新を行う。今、 m 回目のタイムステップの計算が終わったとすると、式 (24) について状態変数ベクトル \mathbf{U}_i の $m+1$ 回目の時間更新は以下の式によってなされる。

$$\frac{\mathbf{U}_i^{m+1} - \mathbf{U}_i^m}{\Delta t} = \mathbf{S}_{f,i}^{m+1} \quad (26)$$

ここに、 Δt はタイムステップの時間間隔であり、式 (26) を満たす \mathbf{U}_i^{m+1} は Newton 法によって得ることができる。

4.5 地表面高さ z の更新

地表面高さ z は、水深 h や流速 u , v とは異なり、セルの頂点にその値が置かれる。そのため、セル中心にある水深 h と流速 u , v の値を Holmes & Connel (1989) の方法¹⁴⁾ を用いて補間し、セル頂点での水深 h と流速 u , v の値を求める。それらの値からセル頂点上での侵食速度 E を式 (3) から評価し、 z の時間変化は式 (2) をもとにして、各頂点上では以下の常微分方程式によって記述される。

$$\frac{dz_k}{dt} = -\frac{E_k}{1 - \lambda_k} \quad (27)$$

ここに、添え字の k は計算セルの k 番目の頂点における値であることを意味する。

4.6 時間積分

表面流については式 (24) 及び (25)、地表面の侵食については式 (27) の空間的な離散化を行った支配方程式を時間方向に解くことで表面流による侵食をシミュレートできる。実際には、式 (24) を解いて得られる \mathbf{U} の値を初期条件にして式 (25) と (27) の時間積分を行う。ただし、式 (25) と (27) は変数 z を介して互いに関係しているため、両方程式を連立して時間積分を行う。求積法には高い安定性を有する3次精度の TVD ルンゲ・クッタ法を用いる。式 (25) の右辺を $\mathbf{H}(\mathbf{U}, z)$ 、式 (27) の右辺を $I(\mathbf{U}, z)$ と表すと、TVD ルンゲ・クッタ法によるこれらの方程式の時間積分は以下の手続きで行われる。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^m + \Delta t \mathbf{H}(\mathbf{U}^m, z^m) \\ z^{(1)} &= z^m + \Delta t I(\mathbf{U}^m, z^m) \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}^m + \frac{1}{4} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{H}(\mathbf{U}^{(1)}, z^{(1)}) \\ z^{(2)} &= \frac{3}{4} z^m + \frac{1}{4} z^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t I(\mathbf{U}^{(1)}, z^{(1)}) \\ \mathbf{U}^{m+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}^m + \frac{2}{3} \mathbf{U}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{H}(\mathbf{U}^{(2)}, z^{(2)}) \\ z^{m+1} &= \frac{1}{3} z^m + \frac{2}{3} z^{(1)} + \frac{2}{3} \Delta t I(\mathbf{U}^{(2)}, z^{(2)}) \end{aligned} \quad (28)$$

なお、この時間積分法は陽解法であるため CFL (Courant-Friedrichs Lewy) 条件が満たされる時間間隔で行う必要がある。計算領域の境界に接するセルにお

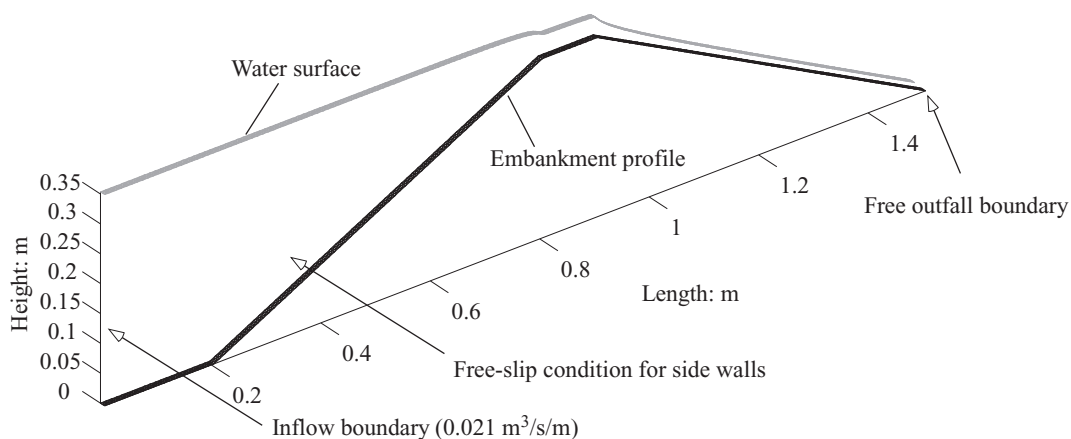


図-2 2次元解析の初期・境界条件

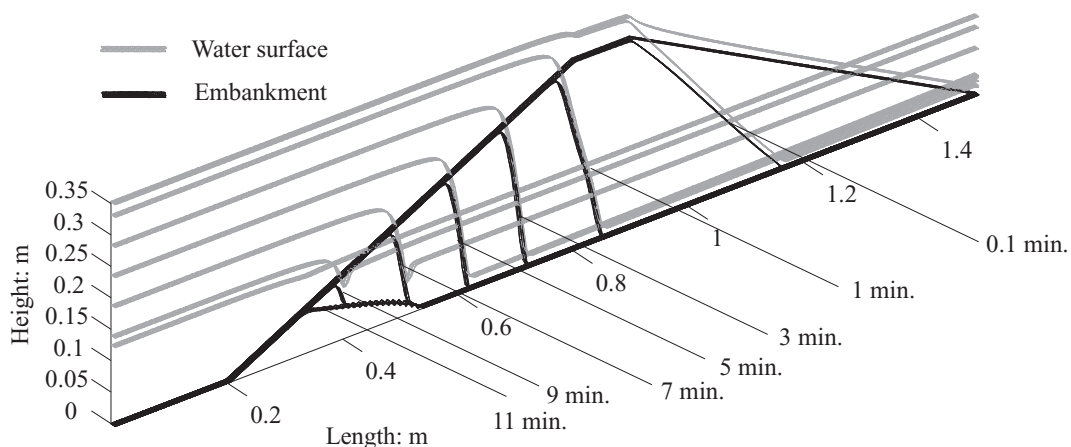


図-3 2次元数値解析結果

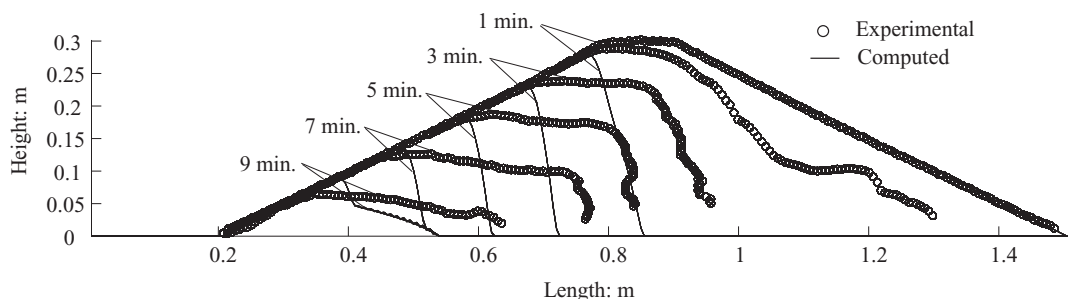


図-4 模型実験¹⁵⁾と数値解析結果との比較

いては式(25)の右辺の第1項を計算する際に、境界条件が必要となる。境界条件の与え方については、Yoon & Kang (2004)と全く同様であり、その詳細は彼らの文献¹⁰⁾に譲る。

5. 数値解析結果

5.1 2次元模型実験との比較

上述した数値解析法の再現性を検証するため、藤澤ら(2011)によって行われた2次元堤体の室内越流侵食実験¹⁵⁾と数値解析結果との比較を行った。藤澤ら(2011)は、砂(豊浦砂)と粘土を質量比にして7:3で混合し

た弱い粘着性を有する材料を用い、高さ30cm、天端幅10cm、底面長さ130cm、斜面勾配1:2の2次元堤体模型(奥行きは10.4cm)を作成して越流侵食実験を行った。この実験の特徴は、堤体材料の侵食特性が基礎的な侵食試験から把握されており、数値計算を行う上で必要な侵食速度に関する材料パラメータが既知である点にある。また、実験では堤体の侵食過程において、侵食された材料の再堆積は確認されず、式(2)によって堤体形状の変化が表現可能である。

図-2には、数値解析に用いた初期条件(堤体の初期形状と初期水面形)と境界条件を示す。計算領域は長さ150cm、奥行き1cmの2次元平面であり、その領域を

1500個の三角形セルによって分割した。境界条件には、堤体上流側から、実験条件と同じ 0.021 m/s^2 の単位幅流量を与え、下流側境界は自由流出境界とした。また、側面は free-slip 境界とした。堤体の初期形状は実験での堤体形状を再現し、堤体上の水流については、所定の越流量における定常流を採用した。越流水の初期条件に定常流を仮定したのは、実験において越流後下流側斜面を下り落ちる水流が、ある程度水深を増してから堤体侵食が卓越することが確認されたためである。間隙率は実験値から 0.395 であり、堤体材料の侵食特性には、 $\tau_c = 1.0 \text{ Pa}$ 、 $\alpha = 7.84 \times 10^{-5} \text{ m/s/Pa}^{3/2}$ 、 $\gamma = 1.5$ を与えた。これら材料パラメータの値は侵食試験から実験的に決定されたものである。マンニングの粗度係数の値については、0.0168 を仮定した。

図-3には、数値解析から得られた堤体の侵食断面と水面形の経時変化を示す。越流初期には堤体の下流側斜面が卓越して侵食を受け、約1分後にはかなり急な斜面が形成される。その後は、急な斜面勾配は維持されたまま、上流側へと移動し、堤体は鉛直方向に徐々に侵食を受けて堤高を失う。最後には、越流水は跳水を生じ（跳水を生じた後は、下流側の水位は高くなる）、水流の加速がなくなることで堤体の侵食は停止する。

図-4は、実験で見られた堤体の侵食断面の形状変化と上述の数値解析結果を重ねあわせたものである。実験結果と数値解析結果では、越流侵食に伴う堤高の変化はうまく再現されているものの、侵食を受けた下流側斜面の形状までは再現できていない。これは、堤体の頂点では侵食過程においても常に限界流が生じているため、限界流における侵食速度が実験と数値計算とで対応していれば、堤高の変化を良好に再現できる。一方、下流側の斜面において水流は加速されるため、侵食が生じた際には斜面勾配はさらに急になる傾向にある。したがって、下流側斜面の侵食はその侵食の発展をさらに速めることもあり、斜面全体に渡って表面流の挙動と侵食のスピードとの関係が再現されなければ、実験結果との一致が難しい。このように、越流による下流側斜面の侵食過程がうまく表現できなかった原因には以下のものが考えられた。

- 数値解析では堤体の侵食速度はどの箇所においても同じであると仮定しているが、実験で作成された堤体は5層（1層の厚さは6cm）で締固めを行って作成されており、局所的に密度の高い締固め面付近では侵食速度が減少し、その箇所付近では侵食速度は不均一になる。
- 実験では最大 10Pa 程度の底面せん断応力下にて侵食速度の測定を行い、 α や γ の侵食速度に関する材料パラメータの値が決定されている。しかし、数値解析では堤体の下流側法尻では 20Pa を越える底面せん断応力が作用しており、そのため、高せん断応力下の侵食速度が正確に表現できていない

可能性がある。

- 式(4)では、流れの剥離等を表現することはできない。そのため、堤体の下流側の法尻で生じ得る流れの剥離による底面せん断応力の低下や、再付着点でのその増加を表現できていない。これは、実際に下流側斜面で生じている底面せん断応力の過大評価と過小評価につながる。

このように、堤体下流側の侵食面の形状に関しては、解析的問題と実験的限界が指摘されるが、図-3に示す堤体下流側の形状変化は、Hanson et al. (2005) や Zhu (2006) に見られる実験結果^{16),17)}とよく一致している。また、堤高の時間変化を予測できることは、破堤に至る時間や越流量の変化の予測に貢献できると考える。

5.2 3次元越流侵食シミュレーション

堤防やため池の越流侵食では、越流初期には広範囲に渡って水が溢れだすものの、侵食が進むにつれて流れが集中し、破堤幅となる流路が形成される。侵食による集中流の発現を再現するには、侵食によって変化する地表面形状に合わせて、Dry/Wet 領域の水流と地表面の変化を首尾よく計算できるかどうか重要な課題となる。ここでは、3次元的に発達する実際の越流破堤現象を再現するため、提案手法が3次元解析に対応できるものであるかどうかを検証する。

図-5には解析に用いた初期条件および境界条件を示す。堤体の断面形状は上述した2次元解析と同様であるが、奥行き方向には60cmの幅をとっている。使用したセル数は2050、節点数（頂点数）は1096である。堤体の天端には、その奥行き方向の中央部に深さ2cmの窪みを設け、水流が堤体中央部に集中するように意図した。図-5に示す越流水の初期水面形は流入側の境界条件として与えた $0.0029 \text{ m}^3/\text{s/m}$ の流量が堤体上を流れる時の水流計算が定常になった時のものを採用している。計算に当たって、間隙率には0.395、堤体の侵食特性には $\tau_c = 0.1 \text{ Pa}$ 、 $\alpha = 8.42 \times 10^{-5} \text{ m/s/Pa}^{3/2}$ 、 $\gamma = 1.5$ 、マンニングの粗度係数には0.0158を仮定した。 τ_c を上述した2次元シミュレーションよりも小さく設定した理由は、水深が浅く、流速が小さな流れにおいても侵食が発生するように留意したことによる。侵食によって水流がある箇所に集中すると、そのほかの箇所では水深が浅く、流速が小さくなる。限界せん断応力の値が大きい場合、流れが集中しにくい箇所での侵食がすぐに停止するため、侵食と水流が集中する過程を表現することは容易である。そのため、限界せん断応力を小さく設定し、多くの領域で侵食が発生する状況においても、侵食と流れの集中が現れるのかどうかも確認することとした。

図-6と図-7に数値解析の結果を示す。これらの図のxy平面には、流速分布の矢印プロットを示し、Dryを判定されたセルを灰色で塗りつぶしてある。図-6から

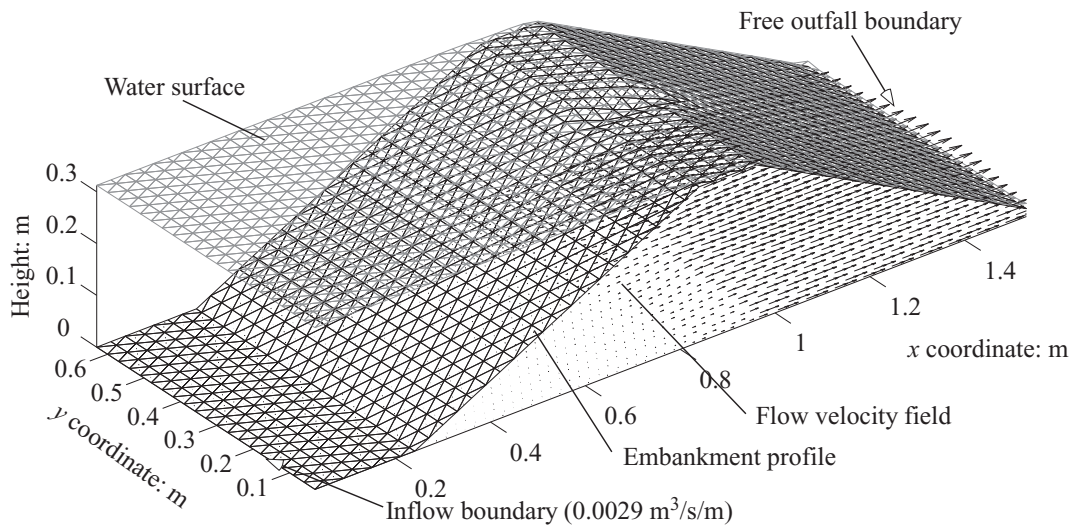


図-5 3次元解析の初期・境界条件

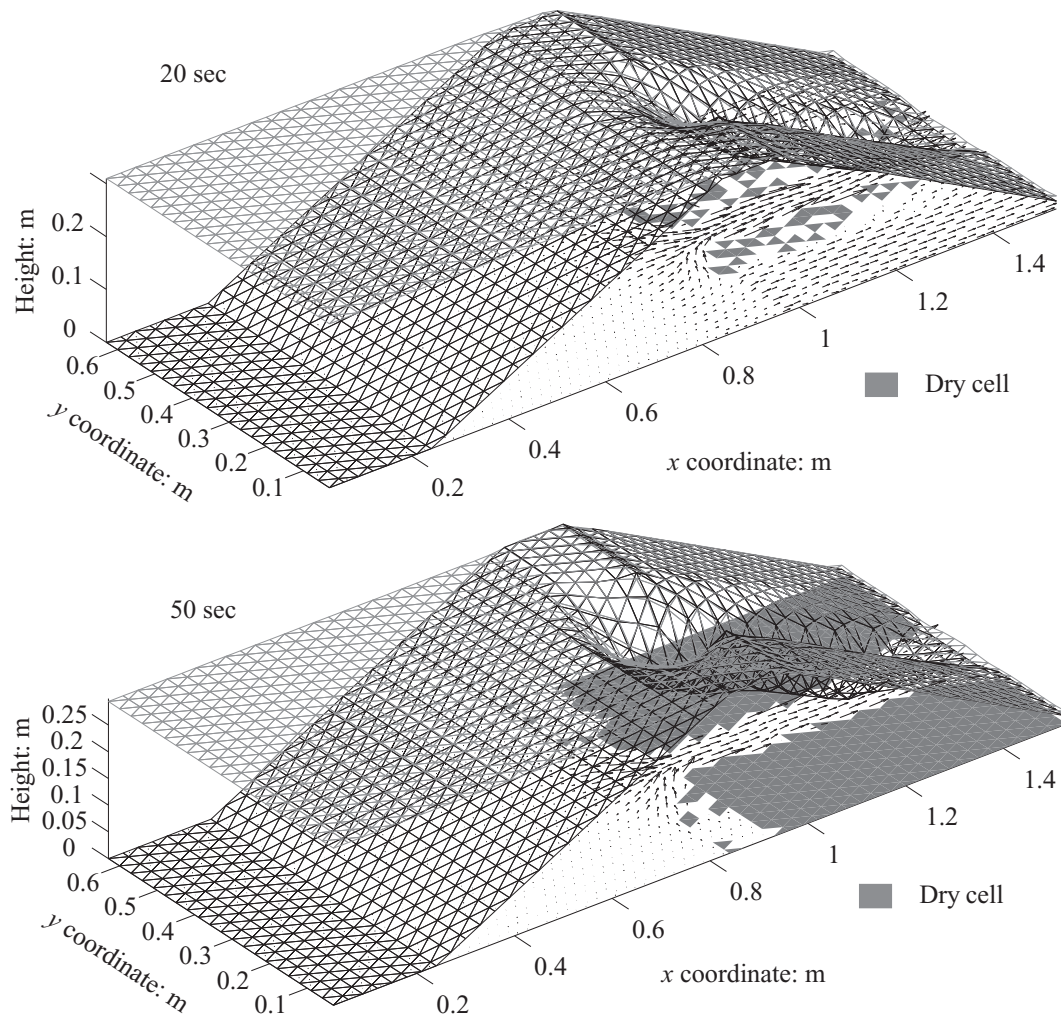


図-6 3次元数値解析結果 (20秒, 50秒後)

分かるように、越流侵食開始時(20秒後)には、天端の窪みによって、流速が大きな下流側斜面の中央付近で侵食が卓越する。水流と侵食が卓越する付近の脇には、少しであるがDryと判定されるセルが出現している。侵食開始の50秒後になると、下流側斜面の流れは

完全に中央部へと集中し、下流側斜面のその他の箇所はDryとなった。図-7からは、集中流による侵食が堤高を減少させ、堤体上流側の水面が低下していく様子が見てとれる(100~600秒後)。水面の低下によって堤体の上流側斜面においてもDryセルが増加していき、

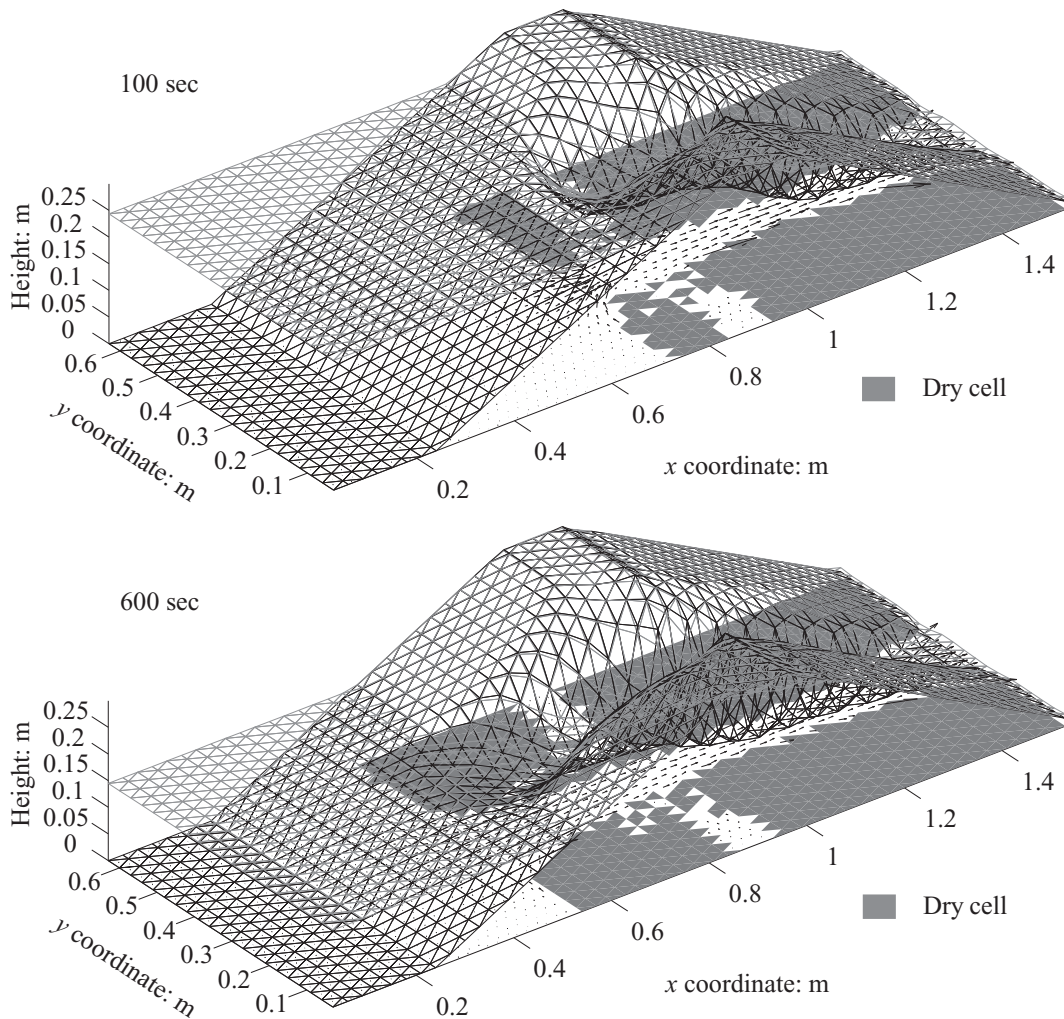


図-7 3次元数値解析結果（100秒，600秒後）

600秒後にはほぼ侵食も治まる結果となった。なお，天端上にDryとなっていないセルが存在するのは，天端上の地表面勾配がない箇所において，流速を失った水が少し残ってしまった結果である。以上の数値解析結果からは，集中的に侵食を受ける堤体表面においても，侵食面の滑らかさを保ちながら表面形状が変化しており，侵食計算が安定して進んでいることが見てとれる。また，地表面の形状の変化が激しい箇所では，水流の変化しやすく，細かい計算セルを用いる方が安定計算が可能と考えるが，図-6や図-7に示すメッシュサイズでも計算が不安定化することはなかった。3次元における計算精度については実験結果との比較はできないが，本論文で提案した数値解析手法（第4章）によって，侵食に伴う集中流の発展や流路の形成を安定的に首尾よく計算できることが分かった。

6. まとめ

本論文では，越流による堤体侵食過程を予測できる数値解析法の開発を目的として，浅水流方程式と侵食速度

に応じた侵食面の形状変化を安定的に同時解析する方法を提案した。数値解析では，有限体積法による離散化を行い，HLLリーマンソルバーを用いたMUSCL法^{10,12)}にSGM¹¹⁾を導入して浅水流方程式を解いた。SGMによって複雑な地表面形状においても浅水流方程式のフラックス項とソース項のバランスが崩れることなく，安定的な数値解析が可能となった。時間積分法には精度の良い安定計算が可能なTVDルンゲクッタ法を用い，侵食速度に応じた地表面の時間変化を浅水流方程式の時間積分と連立して行うことで，表面流による侵食計算を実現した。本解析手法を用いて，2次元及び3次元の堤体侵食解析を行った。得られた結果について以下にまとめる。

- 2次元解析では，越流侵食の初期に卓越する下流側斜面の侵食と，徐々に進行する堤体の高さ方向の侵食を再現した。また，堤高が十分に低下した後には，表面流は跳水を生じ，侵食の終局に至った。
- 2次元の解析結果と実験結果の比較からは，堤高の時間変化については良好に一致したものの，下流側斜面の侵食形状については乖離した結果となっ

た。その理由には、実験堤体における侵食速度の不均一性、高せん断応力下での侵食速度の不正確性、浅水流方程式が表面流の剥離等を表現できないことが考えられた。

- 3次元の堤体侵食解析では、侵食が生じることで表面流が侵食箇所へと集中し、流路が形成される過程を、提案手法によって首尾よく計算できることを示した。また、同計算では地表面形状が急に変化する箇所においても細かい計算セルを用いていないが、安定的な計算が可能であった。

謝辞 本研究の遂行にあたって、科学研究費（基盤研究(A) 23248040, 研究課題名：データ同化による越流侵食リスクに基づく農業水利施設(群)のアセットマネジメント, 代表：村上 章)の援助を得た。ここに記して深謝の意を表す。

数式記号一覧

A :	面積
A_i :	i 番セルの面積
E :	侵食速度
E_k :	k 番節点における侵食速度
\mathbf{E} :	法線方向フラックス
$\mathbf{E}_L, \mathbf{E}_R$:	セル境界左右における法線方向フラックス
\mathbf{E}^* :	セル境界での法線方向フラックス
\mathbf{E}_{ij}^* :	セル境界での法線方向フラックス
\mathbf{F}, \mathbf{G} :	x, y 方向のフラックスベクトル
$\mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i$:	i 番セルの中心における x, y 方向のフラックスベクトル
g :	重力加速度の大きさ
h :	表面流の水深
h_L, h_R :	セル境界左右での水深
\mathbf{H}, \mathbf{I} :	空間離散化された支配方程式の右辺
n :	マニングの粗度係数
\mathbf{q} :	流速ベクトル
\mathbf{q}_B :	流砂量ベクトル
$\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R$:	セル境界左右での流速ベクトル
\mathbf{r}_i :	i 番セルの中心を始点とする相対位置ベクトル
\mathbf{r}_{ij} :	i 番セルの j 番目の辺の中点までの相対位置ベクトル
S_{fx}, S_{fy} :	x, y 方向の摩擦勾配
S^-, S^+ :	変数の伝播速度
\mathbf{S} :	ソース項ベクトル
\mathbf{S}_i :	i 番セルの中心でのソース項ベクトル
S_0, S_f :	ソース項の重力, 摩擦成分
$S_{0,i}, S_{f,i}$:	i 番セルの中心におけるソース項の重力, 摩擦成分

t_x, t_y :	セル境界における外向き単位法線ベクトルの x, y 成分
\mathbf{t} :	セル境界の外向き単位法線ベクトル
t_{ij} :	i 番セルの j 番目の辺における外向き単位法線ベクトル
u, v :	表面流の x, y 方向の流速
\mathbf{U} :	状態変数ベクトル
\mathbf{U}_i :	i 番セルの中心での状態変数ベクトル
x, y :	水平面に置かれた 2 次元座標
t :	時間
z :	侵食面の鉛直高さ
z_k :	k 番節点における侵食面の鉛直高さ
z_{ij} :	i 番セルの j 番目の辺の中点における侵食面の鉛直高さ
α, γ :	侵食速度に関する材料定数
Γ :	境界線長さ
Γ_i :	i 番目のセルにおける境界
$\Delta\Gamma_{ij}$:	i 番目のセルにおける j 番目の辺
ϕ :	セル内で内挿される任意の変数
η :	水面の鉛直高さ ($z + h$ に等しい)
η_k :	k 番目の節点における水面高さ
λ :	侵食される土質材料の間隙率
λ_k :	k 番目の節点における土質材料の間隙率
ρ :	水の密度
τ :	水流が侵食面に及ぼすせん断応力
τ_c :	限界せん断応力

参考文献

- 1) 平成 16 年台風 23 号による淡路ため池被害調査団：平成 16 年台風 23 号による淡路ため池被害調査報告書，農業土木学会京都支部，2005.
- 2) 平成 16 年 7 月福井豪雨による地盤災害の緊急調査団：平成 16 年 7 月福井豪雨による地盤災害調査報告書，(社)地盤工学会，2005.
- 3) Foster, M., Fell, R. and Spannagle, M.: The statistics of embankment dam failures and accidents, *Can. Geotech. J.*, Vol.37, pp.1000–1024, 2000.
- 4) Wang Z. and Bowles D. S.: Three-dimensional non-cohesive earthen dam breach model. Part1: Theory and methodology, *Advances in Water Resources*, Vol.29, pp.1528–1545, 2006.
- 5) Faeh R.: Numerical modeling of breach erosion of river embankment, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.133, No.9, pp.1000–1009, 2007.
- 6) Briaud J. L., Chen H. C., Govindasamy A. V. and Storesund R.: Levee erosion by overtopping in New Orleans during the Katrina harricane, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, Vol.134, No.5, pp.618–632, 2008.
- 7) Parker G. and Izumi N.: Purely erosional cyclic and solitary steps created by flow over cohesive bed, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.419, pp.203–238, 2000.
- 8) Fujisawa, K., Kobayashi, A. and Aoyama, S.: Theoretical description of embankment erosion owing to overflow, *Géotechnique*, Vol.59, No.8, pp.661–671, 2009.
- 9) Julien, P.Y.: *River Mechanics*, Cambridge University Press, UK 2002.
- 10) Yoon T. H. and Kang S.: Finite volume model for two

- dimensional shallow water flows on unstructured grids, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.130, No.7, pp.678–688, 2004.
- 11) Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G. and Ingram, D.M.: The surface gradient method for the treatment of source term in the shallow-water equations, *Journal of Computational Physics*, Vol.168, pp.1–25, 2001.
 - 12) Toro E.F.: *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction*, Springer, 1999.
 - 13) Harten, A., Lax, P.D., and van Leer, B.: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.*, Vol.25, No.1, pp.35–61, 1983.
 - 14) Holmes, D.G. and Connel, S.D.: Solution of the 2D Navier-Stokes equations on unstructured adaptive grids, *Proc. 9th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Technical Papers (A89-41776 18-02), pp.25–39, 1989.
 - 15) 藤澤和謙, 村上 章, 西村伸一: 砂・粘土混合材料の侵食速度測定と室内越流破堤実験, *農業農村工学会論文集*, 第 273 号, pp.45–55, 2011.
 - 16) Hanson, G.J., Cook, K.R. and Hunt, S.L.: Physical modeling of overtopping erosion and breach formation of cohesive embankments, *Transactions of the ASAE*, Vol.48, No.5, pp.1783-1794, 2005.
 - 17) Zhu, Y.: *Breach growth in clay-dikes*, PhD thesis, Delft University of Technology, Netherlands, 2006.

(2012 年 3 月 8 日 受付)